Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (A)
LS 2021/2022

Úloha 1 (10 bodů). Určete a nakreslete definiční obor a vyšetřete parciální derivace funkce

$$f(x,y) = \sin\left(\sqrt{2-x}\right)\sqrt{y^2-x}.$$

Úloha 2 (10 bodů). Ukažte, že rovnice

$$\cos(xy + xz + yz - 3) = xyz$$

určuje v jistém okolí bodu $[1,1,1]$ jednoznačně funkce $x = x(y,z)$ a $z = z(x,y)$ splňující $x(1,1) = z(1,1) = 1$. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z(x,y)$ v bodě $[1,1,1]$. Spočtěte $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(1,1)$.

Úloha 3 (10 bodů). Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a určete, zda a případně kde se jich nabývá:

$$f(x,y) = x^2 y, \quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ y - 2x \le 1,\ 2x + y \le 4,\ x + 2y \ge 2\}.$$

Úloha 4 (10 bodů). Určete hodnost matice $\mathrm{A}(x,y,z)$ v závislosti na parametrech $x,y,z \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3x+8 & 3y-5 \\ 1 & 3 & -3 & -x-1 & -y+2z \\ -1 & -4 & 7 & -3x-8 & -3y+z+12 \\ 0 & -1 & 6 & 2x+2 & 2y+z+6 \\ 1 & 1 & -1 & 2x+6 & 2y+z \end{pmatrix}$$

Úloha 5 (10 bodů). V závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$, $p \ge 0$ vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^p}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - e^{n^{-p}}\right).$$

Řešení

Úloha 1.

$$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x \le \min\{2, y^2\},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\sqrt{y^2-x}\cos\left(\sqrt{2-x}\right)}{2\sqrt{2-x}} - \frac{\sin\left(\sqrt{2-x}\right)}{2\sqrt{y^2-x}} : \quad x < \min\{2, y^2\},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y\sin\left(\sqrt{2-x}\right)}{\sqrt{y^2-x}} : \qquad x < y^2,$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neexistuje, jinde parciální derivace nemají smysl.

Úloha 2. Rovnice tečné nadroviny je $T(x,y) = 3 - x - y$ a $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(1,1) = 2$.

Úloha 3. Funkce f nabývá na množině M maxima $\left(\frac{4}{3}\right)^3$ v bodě $\frac{4}{3}[1,1]$ a minima 0 v bodě $[0,1]$.

Úloha 4.

$$h(\mathrm{A}(x,y,z)) = \begin{cases} 5: & x \ne -2, z \ne -1, \\ 3: & x = -2, z = -1, y = 1, \\ 4: & \text{ostatní případy.} \end{cases}$$

Úloha 5. Pro $p \in \left(\frac{3}{2}, 3\right)$ řada konverguje absolutně a v ostatních případech řada diverguje.

Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (B)
LS 2021/2022

Úloha 1 (10 bodů)**.** Určete a nakreslete definiční obor a vyšetřete parciální derivace funkce

$$f(x,y) = \sqrt{|x|+|y|-1}.$$

Úloha 2 (10 bodů)**.** Ukažte, že soustava rovnic

$$6xyz - 3w = 4xz^2w - yz,$$
$$8x^2yw - 6z^2y = 2xyzw$$

určuje v jistém okolí bodu $[1,1,1,1]$ jednoznačně funkce $x = x(y,z)$ a $w = w(y,z)$ splňující $x(1,1) = 1$, $w(1,1) = 1$. Nalezněte tečnou nadrovinu ke grafu funkce w v bodě $[1,1,1]$.

Úloha 3 (10 bodů)**.** Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a určete, zda a případně kde se jich nabývá:

$$f(x,y,z) = 2x - y, \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ 2x^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 < 4\}.$$

Úloha 4 (10 bodů)**.** Vyřešte soustavy rovnic $\mathbb{A}\boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{b_i}$, $i = 1,2,3$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -10 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b_1} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Úloha 5 (10 bodů)**.** V závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x-2)^{n+1} \operatorname{arctg}(n) \operatorname{arccotg}(n).$$

Řešení

Úloha 1.

$$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ |x|+|y| \geq 1\},$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\operatorname{sign}(x)}{2\sqrt{|x|+|y|-1}} : \qquad |x|+|y| > 1,\ |x| \neq 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\operatorname{sign}(y)}{2\sqrt{|x|+|y|-1}} : \qquad |x|+|y| > 1,\ |y| \neq 0,$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$, $|y| \geq 1$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$, $|x| \geq 1$ neexistují, jinde parciální derivace nemají smysl.

Úloha 2. Rovnice tečné nadroviny je $T(y,z) = 1 + \frac{49}{55}(y-1) + \frac{7}{55}(z-1)$.

Úloha 3. Funkce f nenabývá na množině M maxima a minima, $\sup_M(f) = \sqrt{2} + \sqrt{\frac{7}{2}}$ a $\inf_M(f) = -\sqrt{2} - \sqrt{\frac{7}{2}}$.

Úloha 4. Řešení x_1 a x_2 neexistují, $x_3 \in \left\{ \left[\frac{7}{8}t - \frac{1}{2}, -\frac{t}{4}, t, \frac{5}{2} - \frac{11}{8}t\right];\ t \in \mathbb{R} \right\}$.

Úloha 5. Pro $x \in (1,3)$ řada konverguje absolutně, pro $x = 1$ řada konverguje neabsolutně a v ostatních případech řada diverguje.

Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (C)
LS 2021/2022

Úloha 1 (10 bodů). Určete a nakreslete definiční obor a vyšetřete parciální derivace funkce

$$f(x,y) = \sin\left(\sqrt[3]{x^2+y^2-1}\right).$$

Úloha 2 (10 bodů). Ukažte, že rovnice

$$\sin(xyz) + 1 = x^2 z$$

určuje v jistém okolí bodu $[1,0,1]$ jednoznačně funkce $y = y(x,z)$ a $z = z(x,y)$ splňující $y(1,1) = 0$ a $z(1,0) = 1$. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z(x,y)$ v bodě $[1,0,1]$. Spočtěte $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}(1,1)$.

Úloha 3 (10 bodů). Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a určete, zda a případně kde se jich nabývá:

$$f(x,y,z) = x + 2y - 3z, \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \le 1,\ x^2+y^2+(z+1)^2 = 1\}.$$

Úloha 4 (10 bodů). Spočtěte $\det\left(\mathrm{A}^3\mathrm{A}^T\mathrm{A}^{-1}\right)$, kde

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & -6 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Úloha 5 (10 bodů). Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^{\frac{1}{1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}}.$$

Řešení

Úloha 1.

$$D_f = \mathbb{R}^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x\cos\left(\sqrt[3]{x^2+y^2-1}\right)}{3\left(\sqrt[3]{x^2+y^2-1}\right)^2} : \quad x^2+y^2 \ne 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y\cos\left(\sqrt[3]{x^2+y^2-1}\right)}{3\left(\sqrt[3]{x^2+y^2-1}\right)^2} : \quad x^2+y^2 \ne 1,$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ neexistují pro $x^2+y^2 = 1$.

Úloha 2. Rovnice tečné nadroviny je $T(x,y) = 3 - 2x + y$ a $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}(1,1) = -1$.

Úloha 3. Funkce f nenabývá na množině M maxima, $\sup_M(f) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{15}+3\right)$. Funkce f nabývá na množině M minima $3-\sqrt{14}$ v bodě $\left[-\frac{1}{\sqrt{14}}, -\sqrt{\frac{2}{7}}, \frac{3}{\sqrt{14}} - 1\right]$.

Úloha 4. $\det\left(\mathrm{A}^3\mathrm{A}^T\mathrm{A}^{-1}\right) = -8$.

Úloha 5. Řada je absolutně konvergentní.

Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (D)
LS 2021/2022

Úloha 1 (10 bodů)**.** Určete a nakreslete definiční obor a vyšetřete parciální derivace funkce

$$f(x,y) = (3x+y)^{|2x-3y|}.$$

Úloha 2 (10 bodů)**.** Ukažte, že rovnice

$$\log\left(x^2y + x\right) = 2x\sin(xy)$$

určuje v jistém okolí bodu $[1,0]$ jednoznačně funkce $x = x(y)$ a $y = y(x)$ splňující $x(0) = 1$ a $y(1) = 0$. Rozhodněte, zda je funkce $x(y)$ rostoucí na nějakém okolí bodu 0 a spočtěte $y''(1)$.

Úloha 3 (10 bodů)**.** Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a určete, zda a případně kde se jich nabývá:

$$f(x,y,z) = x + z, \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + 2y^2 = 1,\ y^2 + 2z^2 < 4\}.$$

Úloha 4 (10 bodů)**.** Spočtěte $\det\left(\mathrm{A}^2\mathrm{B}^T\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}\right)$, kde

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Úloha 5 (10 bodů)**.** Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)^n (2n)!}{n^{2n+1} n! 4^n}.$$

Řešení

Úloha 1.

$$\begin{aligned} D_f &= \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ y > -3x\}, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= f(x,y)\left(\frac{3|2x-3y|}{3x+y} + 2\operatorname{sign}(2x-3y)\log(3x+y)\right): \quad y \neq \frac{2}{3}x, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= f(x,y)\left(\frac{|2x-3y|}{3x+y} - 3\operatorname{sign}(2x-3y)\log(3x+y)\right): \quad y \neq \frac{2}{3}x, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{3}{11}, \frac{2}{11}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{3}{11}, \frac{2}{11}\right) = 0,$$

$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x, \frac{2}{3}x\right)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}\left(x, \frac{2}{3}x\right)$ neexistují pro $x \neq \frac{3}{11}$.

Úloha 2. Funkce $x(y)$ je rostoucí na nějakém okolí bodu 0 a $y''(1) = -8$.

Úloha 3. Funkce f nenabývá na množině M maxima a minima, $\sup_M(f) = \sqrt{2}+1$ a $\inf_M(f) = -\sqrt{2}-1$.

Úloha 4. $\det\left(\mathrm{A}^2\mathrm{B}^T\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}\right) = -192$.

Úloha 5. Řada konverguje absolutně.

Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (E)
LS 2021/2022

Úloha 1 (10 bodů)**.** Určete a nakreslete definiční obor a vyšetřete parciální derivace funkce

$$f(x,y) = \max\left\{y + x, x^3\right\}.$$

Úloha 2 (10 bodů)**.** Ukažte, že rovnice

$$(y + x)e^{xy} = \sin(y + 1 + xy) + y$$

určuje v jistém okolí bodu $[0,-1]$ jednoznačně funkce $x = x(y)$ a $y = y(x)$ splňující $x(-1) = 0$ a $y(0) = -1$. Napište rovnici tečy ke grafu funkce $x(y)$ v bodě $[0,-1]$ a rozhodněte, zda je funkce $y(x)$ konkávní na nějakém okolí bodu 0.

Úloha 3 (10 bodů)**.** Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a určete, zda a případně kde se jich nabývá:

$$f(x,y,z) = e^{xyz}, \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x - y + z > 0\}.$$

Úloha 4 (10 bodů)**.** Nalezněte inverzní matici k matici $\mathbb{A}$ a vyřešte soustavu $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Úloha 5 (10 bodů)**.** V závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 0$ vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\sqrt[3]{n^p + 1} - \sqrt[3]{n^p - 1}\right).$$

Řešení

Úloha 1.

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R}^2, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 1 : \qquad y > x^3 - x, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 1 : \qquad y > x^3 - x, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 3x^2 : \quad y < x^3 - x, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 : \qquad y < x^3 - x, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}, \mp\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 1,$$

$\frac{\partial f}{\partial y}\left(x, x^3 - x\right)$ neexistuje a pro $x \neq \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ rovněž $\frac{\partial f}{\partial x}\left(x, x^3 - x\right)$ neexistuje.

Úloha 2. Rovnice tečny je $T(y) = \frac{1}{3}(y + 1)$ a funkce $y(x)$ je konkávní na nějakém okolí bodu 0.

Úloha 3. Funkce f nabývá na množině M maxima $e^{\frac{1}{3\sqrt{3}}}$ v bodech $\sqrt{\frac{1}{3}}[1,1,1]$, $\sqrt{\frac{1}{3}}[-1,-1,1]$, $\sqrt{\frac{1}{3}}[1,-1,-1]$ a minima $e^{-\frac{1}{3\sqrt{3}}}$ v bodě $\sqrt{\frac{1}{3}}[1,-1,1]$.

Úloha 4.

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -23 & -19 & -19 & 7 \\ -10 & -8 & -8 & 3 \\ -3 & -3 & -2 & 1 \\ -6 & -5 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -90 \\ -38 \\ -11 \\ -23 \end{pmatrix}.$$

Úloha 5. Pro $p = 0$ řada diverguje, $p \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ řada konverguje neabsolutně a pro $p > \frac{3}{2}$ řada konverguje absolutně.